MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
LISTA DE EXERCÍCIOS 8

SINGULARIDADES. EXPANSÃO DE LAURENT. TEOREMA DOS RESÍDUOS

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Exercício 1. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que $|\alpha| \leq |\beta|$, deduza a série de Laurent centrada em 0 de

$$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

que converge para $|\alpha| < |z| < |\beta|$.

Exercício 2. Determine a expansão de Laurent da função dada em torno da cada uma das suas singularidades, especificando o anel no qual ela é válida.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+\mathrm{i})}$
(b) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2-2)^2}$
(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+\mathrm{i})}$
(d) $f(z) = z^3 e^{1/z}$
(e) $f(z) = \cos(1/z)$

Exercício 3. Classifique a singularidade 0 de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$
(b) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$
(c) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$
(d) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z + \frac{1}{2}z^2}{z^4}$

Exercício 4. Localize e classifique as singularidades isoladas das funções abaixo:

(a) $\frac{z^5}{1+z+z^2+z^3+z^4}$

Data: 17 de novembro de 2019.

(b) $\frac{1}{(\sin z)^2}$
(c) $\sin \frac{1}{z}$

Exercício 5. Quantos são os zeros do polinômio $p(z) = z^5 - 6z^2 + 1$ no disco $|z| < 1$?

Exercício 6. Calcule a ordem do polo de f no ponto a dado, e calcule $\operatorname{res}(f; a)$.

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$; $a = 0$
(b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{n+1}}$; $a = 0$
(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$; $a = 0$
(d) $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$; $a = 1$
(e) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z^4 - z^5}$; $a = 1$
(f) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$; $a = 0$
(g) $f(z) = \frac{1 - e^{3z}}{z^4}$; $a = 0$
(h) $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^4 - z^5}$; $a = 1$ onde $a > 0$.

Exercício 7. Calcular $\int_\gamma \frac{\sin z}{\cos z}\, \mathrm{d}z$, onde γ é o círculo centrado em 0, de raio $R = 8$, e orientado no sentido anti-horário.

Exercício 8. O objetivo desse exercício é deduzir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}}$$

(A) Calcule a integral

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{\cosh z}\, \mathrm{d}z$$

onde R é um número positivo arbitrário, Γ_R é o retângulo de vértices $-R$, R, $(R + \mathrm{i}\pi)$ e $(-R + \mathrm{i}\pi)$.

(B) Calcule o limite dessa integral com $R \to \infty$ para concluir.

Exercício 9. Determine o resíduo das seguintes funções em cada uma de suas singularidades isoladas:

(a) $\frac{z^p}{1 - z^q}$ onde p, q são inteiros positivos.
(b) $\frac{z^5}{(z^2-1)^2}$
(c) $\frac{\cos z}{1 + z + z^2}$

Exercício 10. Calcule

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+5)}\, \mathrm{d}x$
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)}\, \mathrm{d}x$
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{d}x$
(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
(f) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$
(g) $\int_0^{2\pi} 2(\cos x)^3 + 4(\sin x)^5\,\mathrm{d}x$
(h) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x$ onde $a > 0$.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Email address: piccione.p@gmail.com.br
gustavopramos@gmail.com